

Exercice 3**6 points**On considère n un entier naturel non nul.On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par : $f_n(x) = x^n e^{1-x}$.**Partie A**

1. $f_1(x) = x e^{1-x}$ donc $f_1'(x) = 1 \times e^{1-x} + x \times (-e^{1-x}) = \boxed{(1-x) e^{1-x}}$

On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $e^{1-x} > 0$, donc $f_1'(x)$ est du signe de $1-x$. Or, $1-x \geq 0 \iff x \leq 1$. Donc, pour tout $x \in [0 ; 1[$, $f_1'(x)$ est strictement positif.

2.

x	0	1
Signe de $f_1'(x)$	+	
Variations de f_1		

$$f_1(0) = 0 \times e^{1-0} = 0$$

$$f_1(1) = 1 \times e^{1-1} = e^0 = 1$$

3. La fonction f_1 est continue (puisque dérivable) et strictement croissante sur $[0 ; 1]$, avec $f_1(0) = 0 < 0,1$ et $f_1(1) = 1 > 0,1$, donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f_1(x) = 0,1$ admet une solution unique dans $[0 ; 1]$.

Partie BOn considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par

$$u_n = \int_0^1 f_n(x) dx \quad \text{c'est-à-dire} \quad u_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx.$$

On admet que $u_1 = e - 2$.1. a. Pour $x \in [0 ; 1]$, on a : $0 \leq x \leq 1$.

$x \geq 0$ donc $x^n \geq 0$; on multiplie l'inégalité précédente par x^n :

$$0 \times x^n \leq x \times x^n \leq 1 \times x^n \iff 0 \leq x^{n+1} \leq x^n$$

On a donc démontré que pour tout entier naturel n , on a :

$$\boxed{0 \leq x^{n+1} \leq x^n}$$

b. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{1-x} > 0$, donc, d'après la question précédente :

$$0 \leq x^{n+1} \leq x^n \iff 0 \leq x^{n+1} e^{1-x} \leq x^n e^{1-x}.$$

Donc, d'après la positivité de l'intégration :

$$0 \leq x^{n+1} e^{1-x} \leq x^n e^{1-x} \implies 0 \leq \int_0^1 x^{n+1} e^{1-x} dx \leq \int_0^1 x^n e^{1-x} dx \iff \boxed{0 \leq u_{n+1} \leq u_n}$$

c. D'après la question précédente, puisque $u_{n+1} \leq u_n$ la suite (u_n) est décroissante.

De plus, puisque $0 \leq u_n$, elle est minorée par 0.

Donc, d'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) est convergente vers une limite positive ou nulle.

2. a. On sait que pour u et v dérivables on a : $\int_a^b u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx$.

Posons $u'(x) = e^{1-x}$ et $v(x) = x^{n+1}$. Alors $u(x) = -e^{1-x}$ et $v'(x) = (n+1)x^n$.

On a donc :

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{n+1} e^{1-x} dx &= [-x^{n+1} e^{1-x}]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n (-e^{1-x}) dx \\ &= -1^{n+1} e^{1-1} - (-0^{n+1} e^{1-0}) - (n+1) \int_0^1 -x^n e^{1-x} dx \\ &= -1 + (n+1) \int_0^1 x^n e^{1-x} dx \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{u_{n+1} = (n+1)u_n - 1}.$$

b. On complète le script Python en bleu ci-dessus pour que la fonction `suite()` renvoie la valeur de $\int_0^1 x^8 e^{1-x} dx$.

```
from math import exp

def suite() :
    u = exp(1)-2
    for n in range (1,8):
        u = (n+1) * u - 1
    return u
```

3. a. On se place dans l'intervalle d'intégration : soit $x \in [0 ; 1]$, donc

$0 \leq x \leq 1 \implies 1-x \leq 1 \implies e^{1-x} \leq e$ (croissance de la fonction exponentielle)

$$\implies x^n e^{1-x} \leq x^n \times e \quad (x^n \geq 0)$$

$$\implies \int_0^1 x^n e^{1-x} dx \leq \int_0^1 x^n \times e dx \quad (\text{croissance de l'intégration})$$

$$\implies \int_0^1 x^n e^{1-x} dx \leq e \int_0^1 x^n dx \implies u_n \leq e \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$$

$$\implies u_n \leq \frac{e}{n+1}$$

Corrigé du baccalauréat spécialité sujet 1

b. On sait que pour tout n , on a : $0 \leq u_n$; donc $0 \leq u_n \leq \frac{e}{n+1}$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{n+1} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes, on peut dire que

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$$